Dym - McKean, Fourier Series and Integrals

Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$

Théorème : On note $e_1, \dots, e_d$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $S = \{\pm e_i, i \in [\![1, d]\!]\}$ de loi uniforme. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{k \geq m} \{S_k = 0\}\right) = 1$ si $d \leq 2$.

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \to +\infty} |S_n| = +\infty\right) = 1 \quad \text{si } d \geq 3$$

Démonstration : Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $s_1, \dots, s_n \in S$, on a $\mathbb{P}(X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = s_i)$
$= (2d)^{-n}$

Pour tout $x \in T^d = [0,1]^d$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(2i\pi S_n \cdot x)] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(S_n = k)\, e^{2i\pi k \cdot x} \\
&= \sum_{k_1 \in S} \cdots \sum_{k_n \in S} \frac{1}{(2d)^n} e^{2i\pi k_1 \cdot x} \cdots e^{2i\pi k_n \cdot x} \\
&= \left[\frac{1}{2d} \sum_{k_1 \in S} e^{2i\pi k_1 \cdot x}\right]^n \\
&= \left[\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \cos(2\pi x_i)\right]^n \\
&= [f_d(x)]^n
\end{aligned}$$

où, pour tout $x \in T^d$, $f_d(x) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \cos(2\pi x_i)$. La fonction f_d est continue sur T^d, à valeurs dans $[-1, 1]$, et vaut 1 uniquement en $(0, \dots, 0)$ et $(1, \dots, 1)$.

On a alors, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{P}(S_n = k) = (\widehat{f_d^n})(k) = \int_{T^d} f_d(t)^n e^{-2i\pi t \cdot x}\, dt$.

En particulier, on a $\mathbb{P}(S_n = 0) = \int_{T^d} f_d(t)^n\, dt \geq 0$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{\varepsilon \to 1 \\ \varepsilon < 1}} \varepsilon^n \mathbb{P}(S_n = 0) \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 1 \\ \varepsilon < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \int_{T^d} f_d(t)^n\, dt \quad \text{par Beppo-Levy} \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 1 \\ \varepsilon < 1}} \int_{T^d} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n f_d(t)^n\, dt \quad \text{par convergence dominée} \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon \to 1 \\ \varepsilon < 1}} \int_{T^d} \frac{dt}{1 - \varepsilon f_d(t)} \quad \text{car } |\varepsilon f_d(t)| < 1 \text{ pour tous } t \in T^d \text{ et } \varepsilon < 1 \\
&= \int_{T^d} \frac{dt}{1 - f_d(t)} \quad \text{par Beppo-Lévy}
\end{aligned}$$

car $t \longmapsto \dfrac{1}{1-f_d(t)}$ est continue sur $T^d \setminus \{(0,\dots,0),(1,\dots,1)\}$, positive.

De plus, pour tout $x \in T^d$, on a $1 - f_d(x) = \dfrac{1}{d}\displaystyle\sum_{i=1}^{d}(1-\cos(2\pi x_i))$. Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$,

si x_i est assez proche de 0, on a $\dfrac{1-\cos(2\pi x_i)}{\frac{4\pi^2 x_i^2}{2}} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, donc $\dfrac{\pi^2 x_i^2}{d} \leqslant \dfrac{1-\cos(2\pi x_i)}{d} \leqslant \dfrac{3\pi^2 x_i^2}{d}$.

Donc si x est assez proche de 0, on a $\dfrac{d}{3\pi^2 \|x\|_2^2} \leqslant \dfrac{1}{1-f_d(x)} \leqslant \dfrac{d}{\pi^2\|x\|^2}$.

De même, si x est assez proche de 1, on a $\dfrac{d}{3\pi^2\|x-1\|_2^2} \leqslant \dfrac{1}{1-f_d(x)} \leqslant \dfrac{d}{\pi^2 \|x\|^2}$.

Donc
$$\int_{T^d} \frac{dt}{1-f_d(t)} \quad \begin{array}{ll} = +\infty & \text{si } d \leqslant 2 \\ < +\infty & \text{si } d \geqslant 3 \end{array}.$$

- <u>Si $d \geqslant 3$:</u> On a $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_m = 0) = \int_{T^d}\frac{dt}{1-f_d(t)} < +\infty$. Par Borel-Cantelli, $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{m\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant m}\{S_k = 0\}\Big) = 0$.

Le nombre de retours en 0 est donc fini p.s. L'invariance par translation étend ceci au nombre de retours en n'importe quel point. Pour tout $R \in \mathbb{N}^*$, p.s S_m quitte définitivement $[\![-R, R]\!]^d$ à partir d'un certain rang. Ceci donne $\mathbb{P}(\lim_{m\to+\infty}|S_m| = +\infty) = 1$.

- <u>Si $d \leqslant 2$:</u> On pose $p = \mathbb{P}(\exists m \geqslant 0, S_m = 0)$. On note N le nombre de retours en 0, instant initial exclu. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(N \geqslant m) = p^m$. On suppose par l'absurde que $p < 1$. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N] = \sum_{m\geqslant 0}\mathbb{P}(N = m)m &= \sum_{m\geqslant 0}(\mathbb{P}(N\geqslant m) - \mathbb{P}(N \geqslant m+1))m \\ &= \sum_{m\geqslant 0}(p^m - p^{m+1})m \\ &= \sum_{m \geqslant 0} m p^m (1-p) \\ &= \frac{1}{1-p} < +\infty \quad \text{car } p < 1.\end{aligned}$$

Or $N = \sum_{n>0} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}$, donc $\sum_{n>0} \mathbb{P}(S_n=0) = \mathbb{E}\left(\sum_{n>0} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}\right) = \mathbb{E}[N] < +\infty$,

ce qui contredit l'estimation $\int_{\mathbb{T}^d} \frac{dt}{1-f_d(t)} = +\infty$.

Finalement, on a prouvé que $\mathbb{P}(\exists n>0, S_n=0) = 1$, donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \{S_k=0\}\right) = 1$.

Ceci achève la preuve du théorème.